EXERCICE 4 **5 points**

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 0{,}05 - \dfrac{\ln x}{x-1}$.

   La limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à :

   a. $+\infty$ **b.** $0{,}05$ **c.** $-\infty$ **d.** 0

   $f(x) = 0{,}05 - \dfrac{\ln x}{x-1} = 0{,}05 - \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{x}{x-1}$

   Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{x}{x-1} = 0$.

   On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0{,}05$. **Réponse b.**

2. On considère une fonction h continue sur $[-2;4]$ telle que : $h(-1) = 0$, $h(1) = 4$, $h(3) = -1$.

   On peut affirmer que :

   a. la fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
   b. la fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
   c. il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[1\ ;\ 3]$ tel que $h(a) = 1$.
   d. l'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.

   C'est l'application du théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$. **Réponse c.**

3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) à termes strictement positifs telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et (v_n) converge vers 0 .
On peut affirmer que :

a. la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ converge.
b. la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge.
c. la suite (u_n) est croissante.
d. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n)^n = -\infty$

Limite du quotient de deux suites. **Réponse b.**

4. Pour participer à un jeu, un joueur doit payer 4 €.
Il lance ensuite un dé équilibré à six faces :

— s'il obtient 1, il remporte 12 € ;
— s'il obtient un nombre pair, il remporte 3 € ;
— sinon, il ne remporte rien.

En moyenne, le joueur :

a. gagne 3,50 €
b. perd 3 €.
c. perd 1,50 €
d. perd 0,50 €.

Soit X la variable aléatoire qui donne le gain (mise moins ce que l'on gagne) ; on cherche l'espérance mathématique de cette variable aléatoire.

tirage	nombre 1	nombre pair	autre
gain	$12-4=8$	$3-4=-1$	$0-4=-4$
probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

$E(X) = 8\times\frac{1}{6} + (-1)\times\frac{3}{6} + (-4)\times\frac{2}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$ ce qui correspond à une perte de 0,50 €. **Réponse d.**

5. On considère la variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(3\ ;\ p)$.
On sait que $P(X=0) = \frac{1}{125}$. On peut affirmer que :

a. $p = \frac{1}{5}$
b. $P(X=1) = \frac{124}{125}$
c. $p = \frac{4}{5}$
d. $P(X=1) = \frac{4}{5}$

$P(X=0) = \binom{3}{0} \times p^0 \times (1-p)^{3-0} = (1-p)^3$

On a donc $(1-p)^3 = \frac{1}{125} \iff (1-p)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \iff 1-p = \frac{1}{5}$; donc $p = \frac{4}{5}$.
Réponse c.